PEPS-égalité « Correspondances de Langlands » - Projet INTEGER (GA n266638)

Centre de Bernstein stable et conjecture d'Aubert-Baum-Plymen-Solleveld

Ahmed MOUSSAOUI
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche

INTEGER Institutional Transformation for Effecting Gender Equality in Research

Centre de Bernstein stable

Soit G un groupe réductif déployé et défini sur corps p-adique F.
La théorie du centre de Bernstein nous permet de décomposer $\mathrm{Irr}(G)$ suivant les paires inertielles (M,σ) formées d'un sous-groupe de Levi M de G et d'une représentation irréductible supercuspidale de M. On souhaite le même type de décomposition pour les paramètres de Langlands.
Soit $W_F' = W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ le groupe de Weil-Deligne de F et pour tout $w \in W_F$ notons, $d_w = \mathrm{diag}(\|w\|^{1/2}, \|w\|^{-1/2}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On note $\widehat{G}$ le dual de Langlands de G et $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands qui sont des morphismes $W_F' \longrightarrow \widehat{G}$.

$\mathrm{Irr}(G)$	$\Phi(G)$
M sous-groupe de Levi de G	$\widehat{M}$ sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$
$\sigma \in \mathrm{Irr}(M)$ supercuspidale	$\lambda : W_F \longrightarrow \widehat{M}$ discret
$\chi : M \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ non ramifié	$\widehat{\chi} : W_F \longrightarrow Z^\circ_{\widehat{M}}$ non ramifié ($\widehat{\chi}_{\mid I_F} = 1$)

On note $\mathfrak{X}(\widehat{M}) = \{\chi : W_F \longrightarrow Z^\circ_{\widehat{M}}$, non ramifié$\}$. Soit les relations d'équivalence suivantes :

- $(\widehat{M}_1, \lambda_1) \sim_\Omega (\widehat{M}_2, \lambda_2) \Leftrightarrow \exists g \in \widehat{G}, {}^g\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ et ${}^g\lambda_1 = \lambda_2$.
  On note $\Omega(G)_{\mathrm{st}}$ les classes d'équivalence et on appelle cocaractère infinitésimal une telle classe d'équivalence.
- $(\widehat{M}_1, \lambda_1) \sim_{\mathscr{B}} (\widehat{M}_2, \lambda_2) \Leftrightarrow \exists g \in \widehat{G}, \exists \chi \in \mathfrak{X}(\widehat{M}_2), {}^g\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ et ${}^g\lambda_1 = \lambda_2\chi$.
  On note $\mathscr{B}(G)_{\mathrm{st}}$ les classes d'équivalence.

Pour tout $\mathfrak{i} = [\widehat{M}, \lambda]_{\widehat{G}} \in \mathscr{B}(G)_{\mathrm{st}}$, notons

- $\mathscr{T}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{X}(\widehat{M})/\mathfrak{X}(\widehat{M})(\lambda)$, avec $\mathfrak{X}(\widehat{M})(\lambda) = \{\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{M}), (\lambda)_{\widehat{M}} = (\lambda\chi)_{\widehat{M}}\}$;
- $\mathscr{W}_{\mathfrak{i}} = N_{\widehat{G}}(\mathfrak{i})/\widehat{M} = \{w \in N_{\widehat{G}}(\widehat{M}), \exists \chi \in \mathfrak{X}(\widehat{M}), ({}^w\lambda)_{\widehat{M}} = (\lambda\chi)_{\widehat{M}}\}/\widehat{M}$

On a alors $\Omega(G)_{\mathrm{st}} \simeq \bigsqcup_{\mathfrak{i} \in \mathscr{B}(G)_{\mathrm{st}}} \mathscr{T}_{\mathfrak{i}}/\mathscr{W}_{\mathfrak{i}}$.

Définition

On appelle centre de Bernstein stable de G et on note

$$\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{st}} = \mathbb{C}[\Omega(G)_{\mathrm{st}}].$$

À tout paramètre de Langlands, on peut associer un cocaractère infinitésimal de la façon suivante : pour tout $\phi \in \Phi(G)$, définissons $\lambda_\phi : W_F \longrightarrow \widehat{G}$, $\forall w \in W_F, \lambda_\phi(w) = \phi(w, d_w)$. Notons $\widehat{M}_{\lambda_\phi}$ un Levi de $\widehat{G}$ qui contient minimalement l'image de λ_ϕ. L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}_{\mathrm{st}}: & \Phi(G) & \longrightarrow & \Omega(G)_{\mathrm{st}} \\ & \phi & \longmapsto & (\widehat{M}_{\lambda_\phi}, \lambda_\phi)_{\widehat{G}} \end{array},$$

est bien définie et induit une décomposition :

$$\Phi(G) = \bigsqcup_{\mathfrak{i} \in \mathscr{B}(G)_{\mathrm{st}}} \Phi(G)_{\mathfrak{i}}, \ \text{où} \ \Phi(G)_{\mathfrak{i}} = \{\phi \in \Phi(G), \mathscr{L}_{\mathrm{st}}(\phi) \in \mathfrak{i}\}.$$

Relation entre centre de Bernstein stable et ordinaire

Supposons la correspondance de Langlands pour G et pour tous ses groupes de Levi. On la note $\mathrm{rec}_G : \mathrm{Irr}(G) \longrightarrow \Phi(G)$ (surjective à fibres finies). On peut définir l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} \Omega(G) & \longrightarrow & \Omega(G)_{\mathrm{st}} \\ (L,\sigma) & \longmapsto & \mathscr{L}_{\mathrm{st}}(\mathrm{rec}_L(\sigma)) \end{array}.$$

On conjecture en général (Haines, Scholze-Shin, Vogan) que cette application est un morphisme quasi-fini de variétés algébriques. Si on suppose que la correspondance de Langlands est compatible avec l'induction parabolique et que G est quasi-déployé, alors cette conjecture est prouvée par Haines et cette application est surjective.
Remarquons que cette application n'est pas injective. Par exemple, dans le cas de $\mathrm{SL}_n(F)$, plusieurs représentations supercuspidales ont le même paramètre de Langlands. Pire, dans $\mathrm{Sp}_4(F)$, il y des exemples de représentations supercuspidales σ de $\mathrm{Sp}_4(F)$ tels que $(\mathrm{Sp}_4(F), \sigma)$ s'envoi sur $(\widehat{T}, \lambda_\sigma)$. Autrement dit, les Levi ne sont pas nécessairement duaux.
Ces phénomènes illustrent la relation entre l'induction parabolique et la correspondance de Langlands. Plus précisément, les cocaractères infinitésimaux des paramètres de Langlands correspondants aux représentations supercuspidales.

Centre de Bernstein stable «complet»

L'idée est d'introduire les paramètres de Langlands complets et d'interpréter les représentations supercuspidales en terme de paramètres de Langlands complets à déterminer. Pour cela, si $\phi : W_F' \longrightarrow \widehat{G}$, on note $\mathscr{S}_\phi^G = Z_{\widehat{G}}(\phi)/Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ \cdot Z_{\widehat{G}}$. On a une surjection $s : A_{\widehat{G}}(\phi) = Z_{\widehat{G}}(\phi)/Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ \twoheadrightarrow \mathscr{S}_\phi^G$ et $A_{\widehat{G}}(\phi) = A_{Z_{\widehat{G}}(\phi_{\mid W_F})}(\phi_{\mid \mathrm{SL}_2})$. L'ensemble des paramètres complets est

$$\Phi(G)^+ = \{(\phi, \eta), \phi \in \Phi(G), \eta \in \mathrm{Irr}(\mathscr{S}_\phi^G)\}.$$

Définition

Soit $\widehat{L}$ un sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$ et $\varphi : W_F' \longrightarrow \widehat{L}$ un paramètre de Langlands. On dit que φ est cuspidal si

- φ est discret ;
- il existe $\varepsilon \in \mathrm{Irr}(\mathscr{S}_\varphi^L)$ telle que les représentations irréductibles apparaissant dans la restriction de $s^*\varepsilon$ à $A_{Z_{\widehat{L}}(\varphi_{\mid W_F})^\circ}(\varphi_{\mid \mathrm{SL}_2})$ sont cuspidales au sens de Lusztig (dans le contexte de la correspondance de Springer).

On note $\mathrm{Irr}(\mathscr{S}_\varphi^L)_{\mathrm{cusp}}$ l'ensemble des représentations irréductibles cuspidales au sens ci-dessus. On dit que le paramètre complet (φ, ε) est cuspidal si φ est cuspidal et $\varepsilon \in \mathrm{Irr}(\mathscr{S}_\varphi^L)_{\mathrm{cusp}}$.

Conjecture

Soit $\varphi : W_F' \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands discret. Le L-paquet $\Pi_\varphi(G)$ contient des représentations supercuspidales, si et seulement si, φ est un paramètre de Langlands cuspidal. De plus, les représentations supercuspidales de $\Pi_\varphi(G)$ sont paramétrées par $\mathrm{Irr}(\mathscr{S}_\varphi^G)_{\mathrm{cusp}}$.

Proposition

Les paramètres cuspidaux φ de G sont de la forme :

- $G = \mathrm{GL}_n(F)$, $\varphi : W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ irréductible ;
- $G = \mathrm{SO}_{2n+1}(F)$,
$$\varphi = \bigoplus_{\pi \in I_O} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a} \bigoplus_{\pi \in I_S} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a-1}, \forall \pi \in I_O, d_\pi \in \mathbb{N}, \ \forall \pi \in I_S, d_\pi \in \mathbb{N}^*;$$
- $G = \mathrm{Sp}_{2n}(F)$ ou $G = \mathrm{SO}_{2n}(F)$,
$$\varphi = \bigoplus_{\pi \in I_S} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a} \bigoplus_{\pi \in I_O} \bigoplus_{a=1}^{d_\pi} \pi \boxtimes S_{2a-1} \ \forall \pi \in I_O, d_\pi \in \mathbb{N}^*, \forall \pi \in I_S, d_\pi \in \mathbb{N}.$$

Les résultats de Mœglin suite aux travaux d'Arthur pour les groupes classiques et les théorèmes d'Harris-Taylor et Henniart pour le groupe linéaire prouvent le théorème suivant.

Théorème

Les paramètres de Langlands complets des représentations supercuspidales d'un groupe classique ou d'un groupe linéaire sont exactement les paramètres de Langlands complets cuspidaux.
Autrement dit, la conjecture précédente est vraie pour $\mathrm{GL}_n(F)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ et $\mathrm{SO}_N(F)$.

À présent, on peut redéfinir le même type de relations d'équivalence concernant les triplets $(\widehat{L}, \varphi, \varepsilon)$ avec $\widehat{L}$ un sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$ et (φ, ε) un paramètre de Langlands complet de L. Soit les relations d'équivalence suivantes :

- $(\widehat{L}_1, \varphi_1, \varepsilon_1) \sim_{\Omega^+} (\widehat{L}_2, \varphi_2, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \exists g \in \widehat{G}, {}^g\widehat{L}_1 = \widehat{L}_2, {}^g\varphi_1 = \varphi_2, \varepsilon_1^g = \varepsilon_2$.
  On note $\Omega(G)^+_{\mathrm{st}}$ les classes d'équivalence et on appelle cocaractère infinitésimal une telle classe d'équivalence.
- $(\widehat{L}_1, \varphi_1, \varepsilon_1) \sim_{\mathscr{B}^+} (\widehat{L}_2, \varphi_2, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \exists g \in \widehat{G}, \exists \chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L}_2), {}^g\widehat{L}_1 = \widehat{L}_2, {}^g\varphi_1 = \varphi_2\chi, \varepsilon_1^g = \varepsilon_2$.
  On note $\mathscr{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$ les classes d'équivalence.
  Pour tout $\mathfrak{j} = [\widehat{L}, \varphi, \varepsilon]_{\widehat{G}} \in \mathscr{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$, notons
  - $\mathscr{T}_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{X}(\widehat{L})/\mathfrak{X}(\widehat{L})(\varphi)$, avec $\mathfrak{X}(\widehat{L})(\varphi) = \{\chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L}), (\varphi)_{\widehat{L}} = (\varphi\chi)_{\widehat{L}}\}$;
  - $\mathscr{W}_{\mathfrak{j}} = N_{\widehat{G}}(\mathfrak{j})/\widehat{L} = \{w \in N_{\widehat{G}}(\widehat{L}), \exists \chi \in \mathfrak{X}(\widehat{L}), ({}^w\varphi)_{\widehat{L}} = (\varphi\chi)_{\widehat{L}}, \varepsilon^w \simeq \varepsilon\}/\widehat{L}$

  On a alors $\Omega(G)^+_{\mathrm{st}} = \bigsqcup_{\mathfrak{j} \in \mathscr{B}(G)^+_{\mathrm{st}}} \mathscr{T}_{\mathfrak{j}}/\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}$.

En supposant la conjecture concernant le paramétrage des représentations supercuspidales, on a

$$\Omega(G) \simeq \Omega(G)^+_{\mathrm{st}}.$$

Remarquons que l'on a une application

$$\begin{array}{ccc} \Omega(G)^+_{\mathrm{st}} & \longrightarrow & \Omega(G)_{\mathrm{st}} \\ (\widehat{L}, \varphi, \varepsilon)_{\widehat{G}} & \longmapsto & (\widehat{M}_{\lambda_\varphi}, \lambda_\varphi)_{\widehat{G}} \end{array},$$

bien définie, qui ne suppose pas la correspondance de Langlands. De plus, si $\Omega(G) \simeq \Omega(G)^+_{\mathrm{st}}$, cette application factorise la flèche $\Omega(G) \longrightarrow \Omega(G)_{\mathrm{st}}$.

Il était facile de définir une application de support cuspidal «stable» $\Phi(G) \longrightarrow \Omega(G)_{\mathrm{st}}$, mais il est moins évident de définir le support cuspidal d'un paramètre de Langlands complet. Cette application correspond à travers la correspondance de Langlands, au support cuspidal pour les représentations mais elle doit être définie uniquement en terme de paramètre de Langlands complet.

Théorème

Soit G l'un des groupes $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ ou $\mathrm{SO}_N(F)$. On peut définir une application de support cuspidal pour les paramètres de Langlands complets surjective

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}: & \Phi(G)^+ & \longrightarrow & \Omega(G)^+_{\mathrm{st}} \\ & (\phi, \eta) & \longmapsto & (\widehat{L}, \varphi, \varepsilon)_{\widehat{G}} \end{array}.$$

De plus, les fibres de cette application sont paramétrées les représentations irréductibles de $N_{Z_{\widehat{G}(\varphi_{\mid W_F}\chi_c)}}(Z^\circ_{\widehat{L}})/Z_{\widehat{L}}(\varphi_{\mid W_F}\chi_c)$, où χ_c parcourt l'ensemble des cocaractères correcteurs de φ dans $\widehat{G}$.

Remarque : Soit ϕ un paramètre de Langlands de $\widehat{G}$, notons $N_\phi = d\phi_{\mid \mathrm{SL}_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Supposons que ϕ a le même cocaractère infinitésimal que φ et que $N_\phi = N_\varphi + U_\phi$ dans $\mathrm{Lie}(Z_{\widehat{L}}(\varphi))$ + radical unipotent = sous-algèbre parabolique de $\mathrm{Lie}(Z_{\widehat{G}}(\phi))$. Un cocaractère correcteur pour φ dans $\widehat{G}$ est un caractère $\chi_c : W_F \longrightarrow Z^\circ_{\widehat{L}}$ de la forme $\chi_c(w) = \phi(1, d_w)/\varphi(1, d_w)$, avec ϕ décrit précédemment.

L'application $\mathscr{L}$ induit une décomposition

$$\Phi(G)^+ = \bigsqcup_{\mathfrak{j} \in \mathscr{B}(G)^+_{\mathrm{st}}} \Phi(G)^+_{\mathfrak{j}},$$

où $\Phi(G)^+_{\mathfrak{j}} = \{(\phi, \eta) \in \Phi(G)^+, \mathscr{L}(\phi, \eta) \in \mathfrak{j}\}$.

Conjecture ABPS galoisienne

On suppose toujours que G est un groupe classique déployé. Soit $\mathfrak{j} = [\widehat{L}, \varphi, \varepsilon] \in \mathscr{B}(G)^+_{\mathrm{st}}$. Pour tout $t \in \mathscr{T}_{\mathfrak{j}}$, on note $\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}^t = \{w \in \mathscr{W}_{\mathfrak{j}}, w \cdot t = t\}$ le stabilisateur de t.
On construit des « quotients étendus » de $\mathscr{T}_{\mathfrak{j}}$ par $\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}$ de la façon suivante

$$X_{\mathfrak{j}} = \{(t, w) \in \mathscr{T}_{\mathfrak{j}} \times \mathscr{W}_{\mathfrak{j}}, w \in \mathscr{W}_{\mathfrak{j}}^t\}, \ Y_{\mathfrak{j}} = \{(t, \rho), t \in \mathscr{T}_{\mathfrak{j}}, \rho \in \mathrm{Irr}(\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}^t)\}.$$

Le groupe $\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}$ agit sur $X_{\mathfrak{j}}$ et $Y_{\mathfrak{j}}$ par

$$s \cdot (t, w) = (s \cdot t, sws^{-1}), \ s \cdot (t, \rho) = (s \cdot t, \rho^s).$$

On note

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \mathscr{W}_{\mathfrak{j}} := X_{\mathfrak{j}}/\mathscr{W}_{\mathfrak{j}},$$
$$\mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \widehat{\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}} := Y_{\mathfrak{j}}/\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}.$$

On a une projection $\mathbf{p}_{\mathfrak{j}} : \mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \widehat{\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}} \longrightarrow \mathscr{T}_{\mathfrak{j}}/\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}$.

Théorème

L'application suivante est une bijection,

$$\begin{array}{rccc} \mu_{\mathfrak{j}}: & \Phi(G)^+_{\mathfrak{j}} & \longrightarrow & \mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \widehat{\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}} \\ & (\phi, \eta) & \longmapsto & ((\phi_{\mid W_F})_{\widehat{L}}, \rho_{(\phi,\eta)}) \end{array},$$

où $\rho_{(\phi,\eta)}$ est la représentation irréductible du groupe de Weyl donnée par le théorème.
Cette bijection se restreint en une bijection $\Phi(G)^+_{\mathfrak{j},\mathrm{temp}} \simeq \mathscr{K}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \widehat{\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}}$, où $\mathscr{K}_{\mathfrak{j}}$ est le sous-groupe compact maximal de $\mathscr{T}_{\mathfrak{j}}$.
Il existe une décomposition

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \widehat{\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}} = \bigsqcup_{u \in \mathscr{U}} \left(\mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \mathscr{W}_{\mathfrak{j}}\right)_u,$$

où $\left(\mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \mathscr{W}_{\mathfrak{j}}\right)_u = \Phi(G)^+_{\mathfrak{j},u}$ est réunion de composante irréductible et $\mathscr{U}$ un ensemble de classes unipotentes. Il existe des cocaractères $c_u : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathscr{T}_{\mathfrak{j}}$ tel que pour l'application $\theta_z : \mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \widehat{\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}} \longrightarrow \mathscr{T}_{\mathfrak{j}}/\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}$

$$\theta_z(t, \rho) = W_{\mathfrak{j}} \cdot \mathbf{p}_{\mathfrak{j}}(c_u(z)t),$$

avec $z \in \mathbb{C}^\times$ alors

$$\begin{tikzcd} \Phi(G)^+_{\mathfrak{j}} \arrow[rr, "\mu_{\mathfrak{j}}"] \arrow[dr, "\theta_{q^{1/2}}"'] & & \mathscr{T}_{\mathfrak{j}} /\!\!/ \widehat{\mathscr{W}_{\mathfrak{j}}} \arrow[dl, "\mathscr{L}"] \\ & \mathscr{T}_{\mathfrak{j}}/\mathscr{W}_{\mathfrak{j}} & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Conséquence

On suppose toujours que G est un groupe classique déployé.

Théorème

Soit $\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G)$ et $\mathfrak{j} \in \mathscr{B}^+_{\mathrm{st}}$ obtenue par la correspondance de Langlands. On a des isomorphismes

$$\widehat{\ }: T_{\mathfrak{s}} \simeq \mathscr{T}_{\mathfrak{j}}, \widehat{\ }: W_{\mathfrak{s}} \simeq \mathscr{W}_{\mathfrak{j}},$$

tels que pour tout $w \in W_{\mathfrak{s}}$, $\chi \in T_{\mathfrak{s}}$, on a : $\widehat{w \cdot \chi} = \widehat{w} \cdot \widehat{\chi}$.
D'après le théorème précédent, en composant avec ces isomorphismes, la conjecture ABPS est vérifiée pour les groupes classiques.

Théorème

En conséquence de ce qui précéde, la correspondance de Langlands pour G est compatible avec l'induction parabolique.

Théorème

Soit $\mathfrak{i} = [\widehat{M}, \lambda]_{\widehat{G}} \in \mathscr{B}(G)_{\mathrm{st}}$. Pour tout $\mathfrak{s} = [L, \sigma] \in \mathscr{B}(G)$, notons $\mathrm{rec}_{\mathrm{st}}(\mathfrak{s})$ l'image de $\mathscr{L}_{\mathrm{st}}(\mathrm{rec}_L(\sigma))$ par $\Omega(G)_{\mathrm{st}} \longrightarrow \mathscr{B}(G)_{\mathrm{st}}$.
Notons $\widetilde{\Pi}_{\mathfrak{i}}(G) = \bigsqcup_{\phi \in \Phi(G)_{\mathfrak{i}}} \Pi_\phi(G)$ et $\mathscr{B}(G)_{\mathfrak{i}} = \{\mathfrak{s} = [L, \sigma] \in \mathscr{B}(G), \mathrm{rec}_{\mathrm{st}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{i}\}$.
Alors

$$\widetilde{\Pi}_{\mathfrak{i}}(G) = \bigsqcup_{\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G)_{\mathfrak{i}}} \mathrm{Irr}(G)_{\mathfrak{s}}.$$

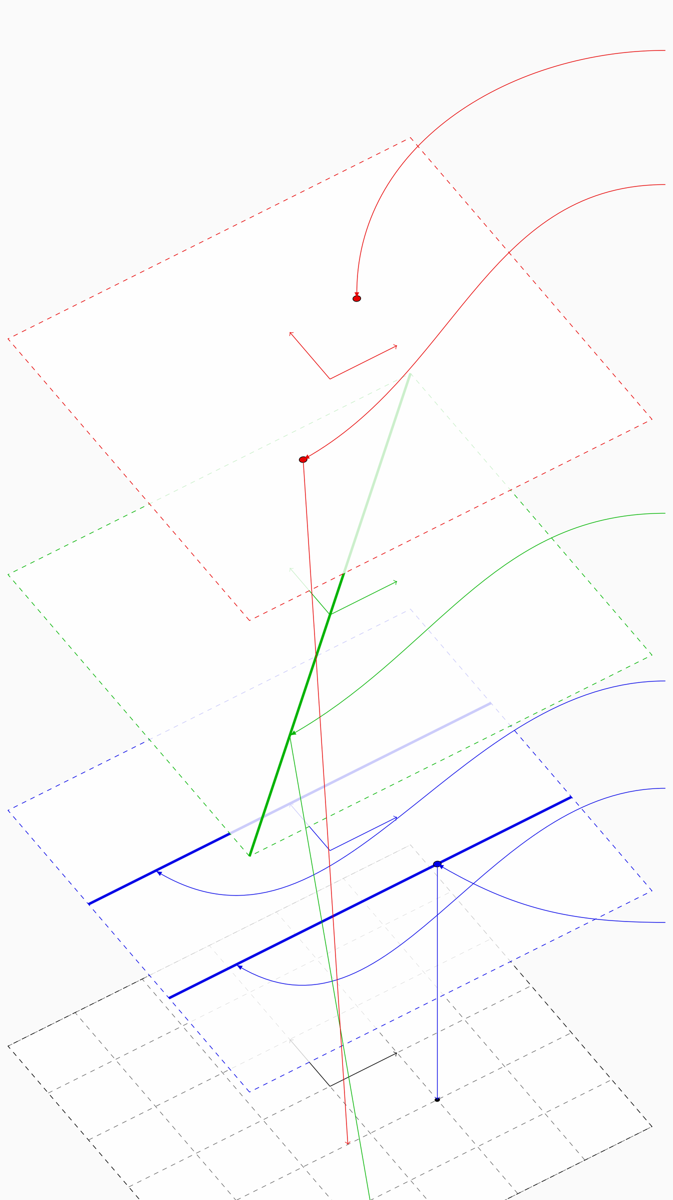
Exemple

On prend $G = \mathrm{Sp}_4(F)$, $T = (F^\times)^2$ tore maximal, $\zeta : F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère ramifié et $\mathfrak{s} = [T, \zeta \boxtimes \zeta]$. La paire inertielle $\mathfrak{s}$ correspond au L-triplet inertiel $\mathfrak{j} = [\widehat{T}, \widehat{\zeta} \boxtimes \widehat{\zeta}, 1]_{\widehat{G}}$.
On s'intéresse à

$$\mathrm{Irr}(G)_{\mathfrak{s}} = \{\text{ss-quotients irr. } i_B^G(\chi_1\zeta \boxtimes \chi_2\zeta), \chi_1 \boxtimes \chi_2 \in \mathfrak{X}(T)\}$$

On identifie $\chi_1\zeta \boxtimes \chi_2\zeta$ à $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^\times)^2$. $W = N_G(T)/T = \langle s_1, s_2 \rangle$ et $s_1(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$ $s_2(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$.

$$\begin{array}{llll} T_{\mathfrak{s}}^{s_1} & = \{(z,z), z \in \mathbb{C}^\times\} & T_{\mathfrak{s}}^{s_1}/Z_{\mathfrak{s}}^{s_1} & = \{[(z,z),(z^{-1},z^{-1})], z \in \mathbb{C}^\times\} \\ T_{\mathfrak{s}}^{s_2} & = \{(z,1),(z,-1), z \in \mathbb{C}^\times\} & T_{\mathfrak{s}}^{s_2}/Z_{\mathfrak{s}}^{s_2} & = \{[(z,1),(z^{-1},1)], z \in \mathbb{C}^\times\} \sqcup \{[(z,-1),(z^{-1},-1)], z \in \mathbb{C}^\times\} \\ T_{\mathfrak{s}}^{s_1s_2} & = \{(1,1),(-1,-1)\} & T_{\mathfrak{s}}^{s_1s_2}/Z_{\mathfrak{s}}^{s_1s_2} & = \{(1,1),(-1,-1)\} \\ T_{\mathfrak{s}}^{s_1s_2s_1s_2} & = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\} & T_{\mathfrak{s}}^{s_1s_2s_1s_2}/Z_{\mathfrak{s}}^{s_1s_2s_1s_2} & = \{(1,1),[(1,-1),(-1,1)],(-1,-1)\} \end{array}$$



$(\rho_{3,1}, (1,1)) \longleftrightarrow \delta(\zeta)$
$(\rho'_{3,1}, (1,1)) \longleftrightarrow \delta'(\zeta)$ — $\zeta \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus 1$ (L-paquet=$\{\delta(\zeta\xi), \delta'(\zeta\xi), \sigma_\zeta, \sigma'_\zeta\}$, $\sigma_\zeta, \sigma'_\zeta$ supercuspidales)

$(\rho_{3,1}, (-1,-1)) \longleftrightarrow \delta(\zeta\xi)$
$(\rho'_{3,1}, (-1,-1)) \longleftrightarrow \delta'(\zeta\xi)$ — $\zeta\xi \boxtimes (S_3 \oplus S_1) \oplus 1$ (L-paquet=$\{\delta(\zeta\xi), \delta'(\zeta\xi), \sigma_{\zeta\xi}, \sigma'_{\zeta\xi}\}$, $\sigma_{\zeta\xi}, \sigma'_{\zeta\xi}$ supercuspidales)

$(\rho_{2,2}, (z,z)) \longleftrightarrow \chi\zeta\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1$ — $\chi\zeta \boxtimes S_2 \oplus 1 \oplus \chi^{-1}\zeta \boxtimes S_2$

$(1, (z,1)) \longleftrightarrow \chi\zeta \rtimes T_1^\zeta$
$(\varepsilon, (z,1)) \longleftrightarrow \chi\zeta \rtimes T_2^\zeta$ — $\chi\zeta \oplus \zeta \oplus 1 \oplus \zeta \oplus \chi^{-1}\zeta$

$(1, (z,-1)) \longleftrightarrow \chi\zeta \rtimes T_1^{\xi\zeta}$
$(\varepsilon, (z,-1)) \longleftrightarrow \chi\zeta \rtimes T_2^{\xi\zeta}$ — $\chi\zeta \oplus \zeta\xi \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \chi^{-1}\zeta$

$(1 \boxtimes 1, (z,-1)) \longleftrightarrow Q_1(\zeta \rtimes T_1^{\xi\zeta})$
$(\varepsilon \boxtimes 1, (z,-1)) \longleftrightarrow Q_2(\zeta \rtimes T_1^{\xi\zeta})$
$(1 \boxtimes \varepsilon, (z,-1)) \longleftrightarrow Q_1(\zeta \rtimes T_2^{\xi\zeta})$
$(\varepsilon \boxtimes \varepsilon, (z,-1)) \longleftrightarrow Q_2(\zeta \rtimes T_2^{\xi\zeta})$ — $\zeta \oplus \xi\zeta \oplus 1 \oplus \xi\zeta \oplus \zeta$

La L-paire inertiel $\mathfrak{i} \in \mathscr{B}(G)_{\mathrm{st}}$ image de $\mathfrak{j}$ par $\mathscr{B}(G)^+_{\mathrm{st}} \longrightarrow \mathscr{B}(G)_{\mathrm{st}}$ est $\mathfrak{i} = [\widehat{T}, \widehat{\zeta} \boxtimes \widehat{\zeta}]$.
On a dans ce cas $\widetilde{\Pi}_{\mathfrak{i}} = \mathrm{Irr}(G)_{[T,\zeta\boxtimes\zeta]} \sqcup \mathrm{Irr}(G)_{[G,\sigma_\zeta]} \sqcup \mathrm{Irr}(G)_{[G,\sigma_{\zeta\xi}]} \sqcup \mathrm{Irr}(G)_{[G,\sigma'_\zeta]} \sqcup \mathrm{Irr}(G)_{[G,\sigma'_{\zeta\xi}]}$.